УДК 517.983.23

А.В. ГЛУШАК

A.V. GLUSHAK

**КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ**

**CRITERION OF UNIQUENESS OF THE INVERSE PROBLEM**

**FOR THE ABSTRACT EULER-POISSON-DARBU EQUATION**

*Устанавливается критерий единственности решения обратной задачи для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с финальным условием Неймана.*

*Ключевые слова: уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, обратная задача, критерий единственности.*

*A criterion is established for the uniqueness of the solution of the inverse problem for the abstract Euler-Poisson-Darboux equation with the final Neumann condition.*

*Keywords: Euler-Poisson-Darboux equations, inverse problem, uniqueness criterion.*

Пусть *E* – комплексное банахово пространство и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*, область определения которого не обязательно плотна в *E*.

Мы будем изучать обратные задачи на конечном интервале , т.к. общий случай сводится к рассматриваемому заменой переменной *t* на *t/T*.

При рассмотрим задачу определения функции принадлежащей при , и элемента удовлетворяющих сингулярному уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу

 (1)

начальным условиям

(2)

а также финальному переопределению в точке . В настоящей работе будет рассмотрен случай финального переопределения, имеющего вид

(3)

Отметим, что при в условии (2) вместо можно задавать и более общее весовое условие

и доказательство основных результатов при этом не изменится.

Задача (1) – (3) для эволюционного сингулярного уравнения относится к классу обратных задач (см. [1], [2]) и является, вообще говоря, некорректно поставленной задачей.

Требуется восстановить неизвестную, не зависящую от времени *t*, правую часть *p* уравнения (1) при помощи дополнительного условия (3) в финальный момент времени.

Мы будем исследовать вопрос единственности решения рассматриваемой обратной задачи.

Ранее в [3] был получен критерий единственности такого рода обратных задач в случае дифференциального уравнения первого порядка, а для несингулярных уравнений второго порядка (случай в уравнении (1)) – в работах [4], [5]. Отметим также, что в работах [3], [4] задавалось финальное переопределение в виде , а в [5] – в виде . В указанных работах приводится обзор публикаций по данной тематике и установлено, что единственность решения обратных задач зависит лишь от расположения на комплексной плоскости собственных значений оператора *A* и связана с распределением нулей некоторых аналитических функций. В настоящей работе будет показано, что аналогичная ситуация имеет место и в случае обратных задач для сингулярного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Исследование единственности решения задачи (1) – (3) сводится к вопросу об отсутствии у уравнения (1) нетривиальных решений , удовлетворяющих нулевым условиям

(4)

поскольку нулевое решение у этой задачи всегда имеется.

Нетривиальные решения однородной задачи (1), (4) имеют вид

где

 – гамма-функция Эйлера, – модифицированная функция Бесселя, при некотором является собственным значением оператора *A* с собственным вектором . Функцию называют нормированной функцией Бесселя и используют также обозначение .

Сформулируем теперь критерий единственности решения обратной задачи (1) – (3).

**Теорема 1.** Пусть и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что обратная задача (1) – (3) имеет решение . Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

**Следствие.** Пусть *A* – линейный замкнутый оператор, не имеющий действительных отрицательных собственных значений. Тогда обратная задача (1) – (3) при любом выборе элементов имеет не более одного решения.

Например, для заданного на множестве функций

дифференциального оператора Бесселя , где

единственность решения рассматриваемых обратных задач сводится к исследованию расположения нулей функции , которые являются собственными значениями оператора , и нулей функции . Отметим также, что важную роль при исследовании единственности играют и промежутки изменения переменных и , поскольку при этом нули каждой из функций Бесселя меняют свое положение.

В зависимости от параметров *k* и *q*, указанные функции Бесселя могут иметь, а могут и не иметь общих нулей, расположенных на , поэтому единственность решения обратных задач может иметь место, а может и нарушаться. Подробнее о расположении нулей см., например, в работе [6].

В случаях или , где *i* – мнимая единица, собственные значения оператора *A* лежат либо на ,либо на мнимой оси и не попадают на , поэтому соответствующие обратные задачи имеют единственное решение.

Далее уже при рассмотрим уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу (1) с неизвестным элементом и зависящей от времени правой частью специального вида

 (5)

Как следует из работы [7] в этом случае следует задавать начальные условия вида

 (6)

Задача (5), (6) заменой сводится к уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу с параметром

(7)

и с начальными условиями

 (8)

В теореме 1 установлен критерий единственности обратной задачи (7), (8) с финальным условием

которое по отношению к функции имеет вид

. (9)

Таким образом, для обратной задачи (5), (6), (9) справедлив следующий критерий.

**Теорема 2.** Пусть и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что обратная задача (5), (6), (9) имеет решение . Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

Сделаем замечание об обратной задаче с финальным условием

 , (10)

задаваемом вместо условия (3). Как установлено в работе [8], характеристическая функция обратной задачи (1), (2), (10) имеет вид

и для того, чтобы решение обратной задачи (1), (2), (10) было единственным, необходимо,

чтобы ни один нуль характеристической функции не являлся собственным значением оператора *A*.

Нули характеристической функции не являются нулями функции Бесселя, явно не выписываются, поэтому для указанной задачи метод доказательства достаточности, использующий разложение в ряды Фурье-Бесселя не проходит.

В работе [8] также указано, что для однозначной разрешимости задачи (1), (2), (10) с ограниченным оператором *A*, необходимо и достаточно, чтобы на спектре оператора *A* выполнялось условие

Кроме того, приводится достаточное условие однозначной разрешимости и с неограниченным оператором *A.*

В заключение укажем, что рассматриваемая в [9] задача Дирихле для уравнения Бесселя-Струве

 (11)

 (12)

была переформулирована и решена как обратная задача нахождения функции и входящего в уравнение (11) элемента , одновременно являющимся вторым начальным условием, из уравнения

 (13)

по начальному и финальному условиям из равенства (12). Уравнение (13) отличается от уравнения (1) тем, что оно содержит зависящую от времени правую часть специального вида.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00732).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Денисов А.М. – Введение в теорию обратных задач – М.: Изд-во МГУ, 1994.

2. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. – Methods for solving inverse problems in mathematical physics – New York. Basel. Marcel Dekker. 2000.

3. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром – Дифференц. уравнения. – 2000 – Т. 36, № 8 – С. 1132 – 1133.

4. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера – Дифференц. уравнения – 2002 – Т. 38, № 5 – С. 637 – 644.

5. Алмохамед М. Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода – Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика – 2019 – № 3 – С. 50 – 58.

6. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления – Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014 – Т. 54, № 9 – С. 1387 – 1441.

7. Глушак А.В. Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу – Дифференц. уравнения – 2018 – Т. 54, № 5 – С. 627 – 637.

8. Глушак А.В., Попова В.А. Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу – СМФН – 2006 – Т. 15 – РУДН, М. С. 126 – 141.

9. Глушак А.В. О разрешимости граничных задач для абстрактного уравнения Бесселя-Струве – Дифференц. уравнения – 2019 – Т. 55, № 8 – С. 1103 – 1110.

**Глушак Александр Васильевич**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

г. Белгород.

Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования.

E-mail: glushak@bsu.edu.ru